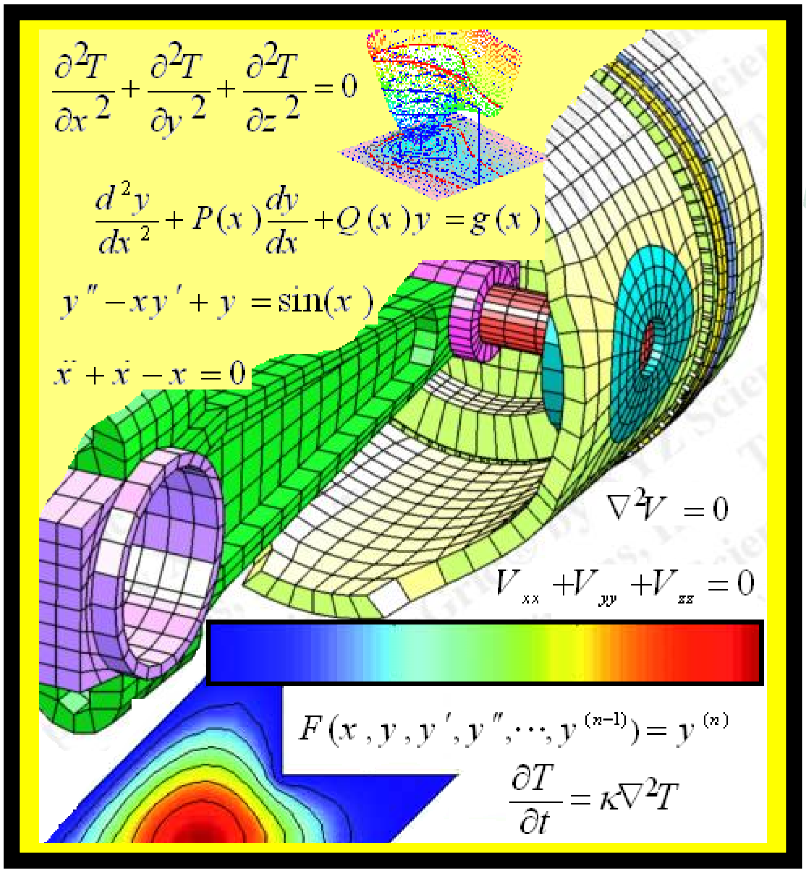
بســــم الله الرحمـــن الرحـــيم



المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية

تعتبر المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية من المواضيع المهمة في الرياضيات البحتة و التطبيقية و هي الرابط بين العلوم الرياضية و الهندسية . فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية و الميكانيكية و الإنشائية من أنواع المعادلات التفاضلية .

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية ، و هناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية . حتى الطرق العددية و طريقة العناصر المنتهية ليستا طرق عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشرائط . يمكن أن يصبح نتيجة بحثك أو أطروحتك للماجستير أو الدكتوراة معادلة تفاضلية من ثم حلّها بطريقة تحليلية أو عددية .

بعض مفاهيم التفاضل و الإشتقاق

نواجه في نظرية المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية هذه العناصر الرياضياتية :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad و \quad \frac{dy}{dx} \quad و \quad \frac{\partial y}{\partial x} \quad و \quad Dy \quad و \quad y' \quad و \quad \dot{y} \quad و \quad y_x$$

تشترك جميع هذه العناصر في مفهوم التفاضل و الإشتقاق وتختلف بالرسم و الرموز

تغيرات y بالنسبة الى x هي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

تعبير لايبنتز لهذه التغيرات هو $\frac{dy}{dx}$

و تعبير نيوتن لهذه التغيرات هو $\dot{y}$

و رياضياً أحياناً يرمز لهذه التغيرات y' و إذا كانت رتبة الإشتقاق أكبر من واحد يرمز y'' أو y''' و إذا كانت المتغيرات كثيرة جداً التفاضل بالنسبة الى x يكتب $\frac{\partial y}{\partial x}$ أو y_x و إذا كانت الدالة f من عدة متغيرات x و y و z التفاضل بالنسبة لهذه المتغيرات هو $\frac{\partial f}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ أو f_{xyz} .

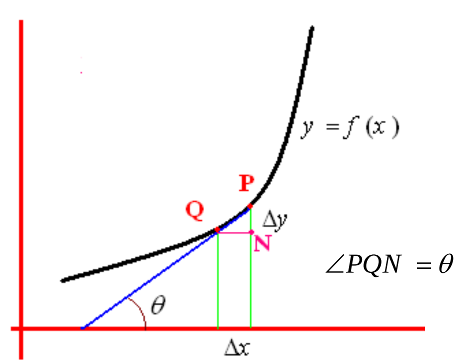
كذلك نواجه هذه المصطلحات لهذه التعابير

- Derivative
- Differential
- Partial

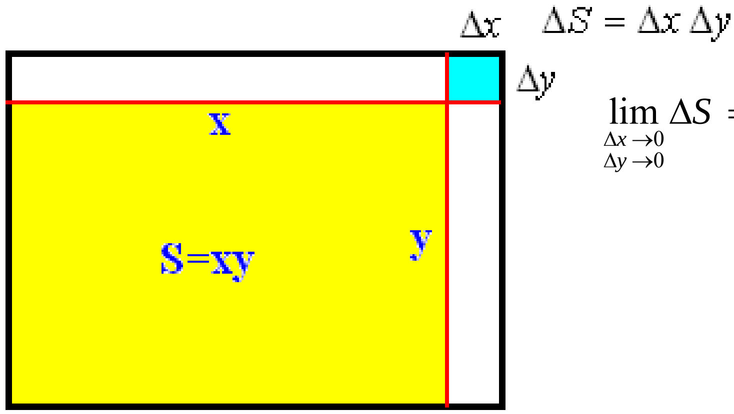
التعبير الرياضي للإشتقاق هو

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$y'(x) = \tan\theta$$



أحد التعابير الهندسية لهذه التغيرات



$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta S = ds$$

تغيرات المسافة بالنسبة للزمن يساوي السرعة و تكتب $v = \dot{x} = \dfrac{dy}{dt}$

تغيرات السرعة بالنسبة للزمن يساوي التعجيل و يكتب $a = \ddot{x} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

إذا كانت مرتبة الإشتقاق n يكتب إشتقاق مرتبة n للدالة f بالنسبة الى x هكذا :

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

لاحظ كيفية تعريف تغيرات z بالنسبة الى x و y

$$z(x,y) \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية العادية الخطية هي :

$$P_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_0(x)y=P(x)$$

في هذه المعادلة $P_n(x)$ و $P_{n-1}(x)$ و ... و $P_0(x)$ و $P(x)$ توابع من x . أوهذه الدوال هي أعداد حقيقية .

هذه المعادلة هي من الدرجة n . المعادلة التفاضلية العادية التي ليست بهذه الصيغة هي معادلة تفاضلية عادية غير خطية (nonlinear) .

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الدرجة الثانية هي :

$$A(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}+$$
$$+D(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}+F(x,y)U(x,y)+G(x,y)=0$$

الدوال من $A(x,y)$ الى $G(x,y)$ المتغير فيها x و y . كذلك يمكن أن تكون هذه الدوال أعداد حقيقية .

المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية التي ليست بهذه الصيغة هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية .

درجة المعادلة التفاضلية تساوي رتبة أكبر تفاضل في المعادلة .

كيف نصل لمعادلة تفاضليه

تغيرات المسافة بالنسبة الى تغيرات الزمن هي السرعة و هي أبسط معادلة تفاضليه تكتب هكذا :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

كذلك تغيرات السرعة بالنسبة للزمن هو التعجيل و يكتب :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

أو

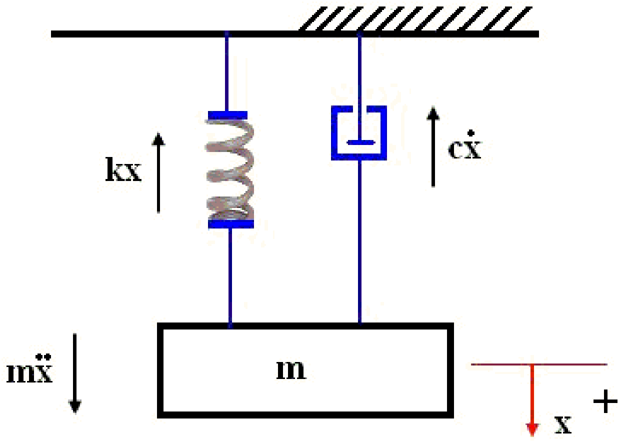
$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

معادلة حركة البندول

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

g ثابت عجلة الأرض و L طول البندول و θ الزاوية . هذه المعادلة من المعادلات المعقدة في نظرية المعادلات التفاضلية و تفتح أفق حل المعادلات التفاضلية الإهليجية ، لكن لحل هذه المعادلة يجب فرض الزاوية صغيرة جداً من ثم $\sin\theta \approx \theta$ و تصبح المعادلة بسيطة و قابلة للحل .

الحركة الإهتزازية



c معامل مخمد الإهتزاز

k معامل الزنبرك

m الكتلة

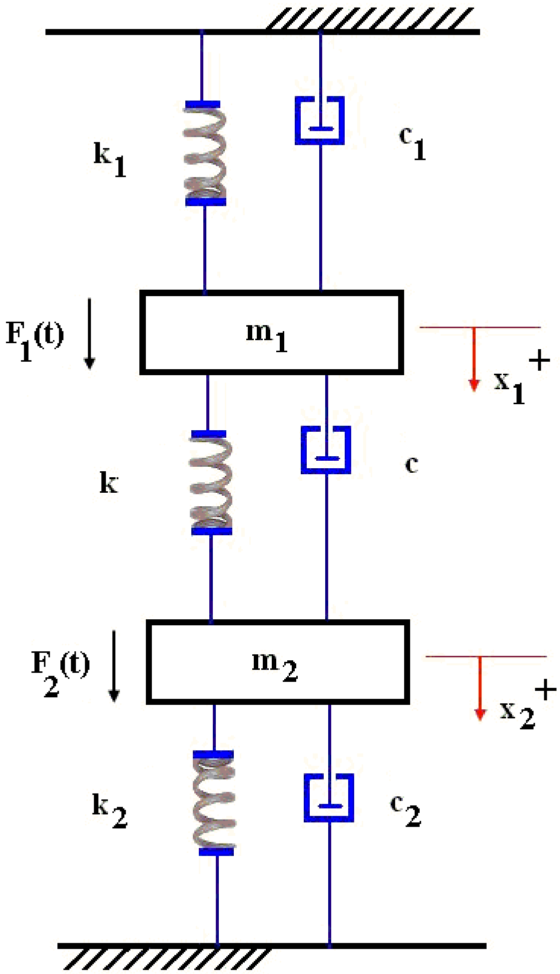
خط التوازن

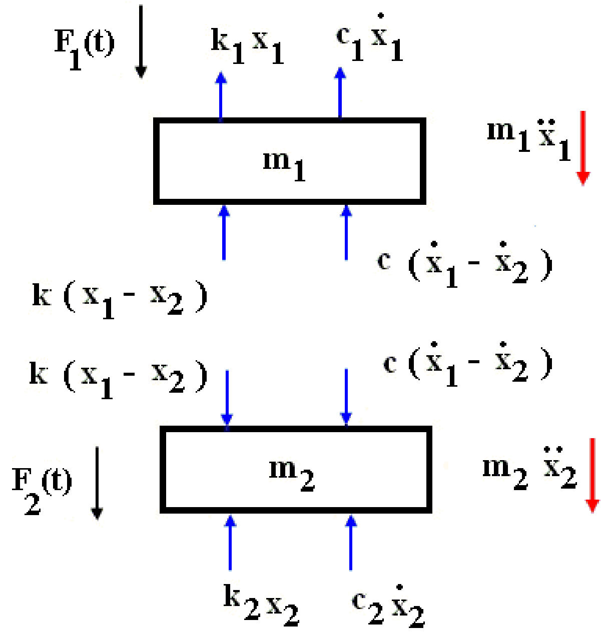
القوى التي جهتها خلاف جهة x علامتها سالبة إذن

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

هذه معادلة تفاضلية عادية درجة ثانية

في هذه المعادلة $\ddot{x}$ إشتقاق رتبة ثانية (إشتقاق رتبة ثانية من الفاصلة x بالنسبة للزمن t)
و $\dot{x}$ إشتقاق رتبة أولى .





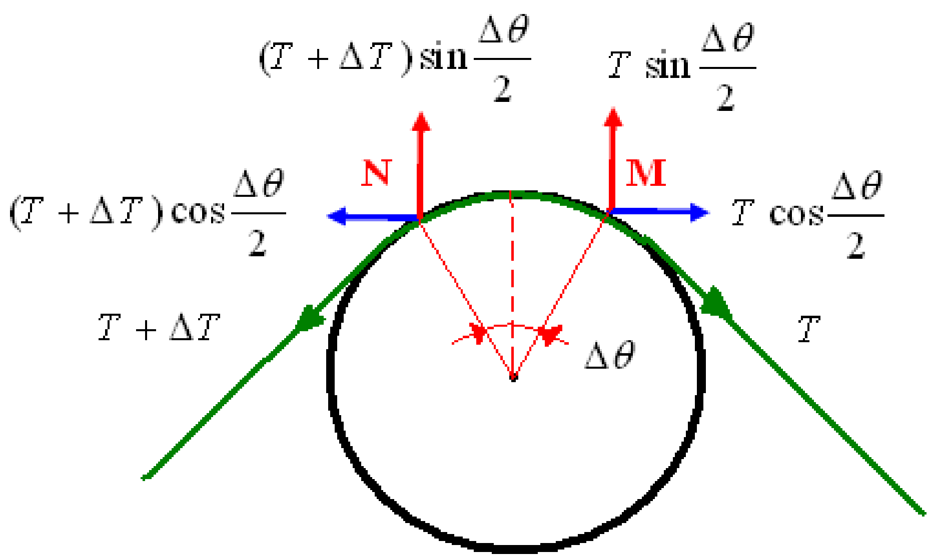
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(c+c_1)\dot{x}_1+(k+k_1)x_1-c\dot{x}_2-kx_2=F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2+(c+c_2)\dot{x}_2+(k+k_2)x_2-c\dot{x}_1-kx_1=F_2(t) \end{cases}$$

هذه المنظومه المعادلاتية بصيغة المصفوفات بهذه الصورة

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c+c_1 & -c \\ -c & c+c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k+k_1 & -k \\ -k & k+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

قوة سحب السيور على البكرة

قوة سحب السيور T على البكرة ترتبط بمعامل الإحتكاك μ و زاواية إتصال السيور بالبكرة و هذه الزاوية مرتبطة بقطر البكرة و السحب البدائي P على البكرة نتيجة تحليل القوى بين البكرة و السيور معادلة تفاضلية عادية . تحليل القوى في نقطتين M و N على البكرة الفاصلة بينهما قليلة جداً بالنتيجة الزاوية صغيرة $\Delta\theta$. طول السيور في هذه الفاصلة Δs لذلك القوة العمودية على البكرة هي $P\Delta s$ ، ضرب هذه القوة بمعامل الإحتكاك هي القوة الأفقية $\mu P\Delta s$.



$$T\sin\frac{\Delta\theta}{2}+(T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2}=P\Delta s$$

$$(T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2}-T\cos\frac{\Delta\theta}{2}=\mu P\Delta s$$

نحذف القوة P بين هذه الرابطتين

$$\begin{cases} (2T+\Delta T)\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} = P\,\Delta s \\ \Delta T\cos\dfrac{\Delta\theta}{2} = \mu P\,\Delta s \end{cases} \Rightarrow \frac{2T+\Delta T}{\Delta T}\tan\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\Delta T = \frac{2\mu T}{1-\mu\tan\dfrac{\Delta\theta}{2}}\times\tan\frac{\Delta\theta}{2} \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta\theta} = \frac{\tan\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}\times\frac{\mu T}{1-\mu\tan\dfrac{\Delta\theta}{2}}$$

عندما $\Delta\theta \to 0$ النتيجة

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu T$$

المعادلة الإهتزازية للسلك المرّن

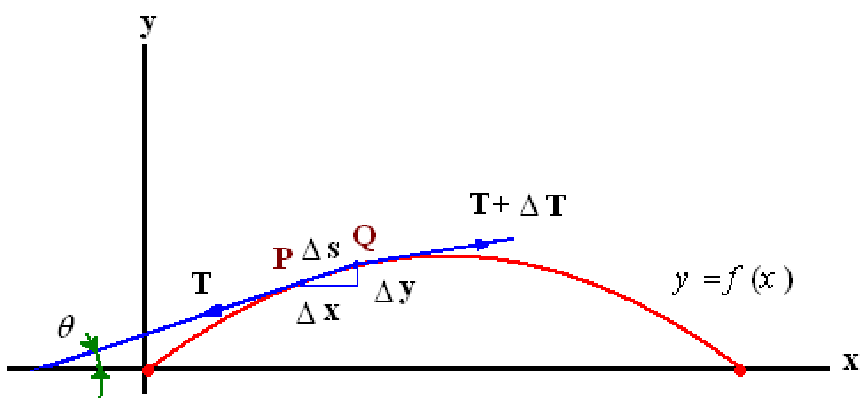
مثال : نفرض سلك مرّن مُثبت بين نقطتين على محور x من الإحداثي xy . في لحظة زمنية t= 0 نضرب السلك ضربة قائمة حتى يبدأ السلك بحركة إهتزازية في جهة المحور y .

الهدف تعين مكان أي نقطة على السلك في زمن غير معين t بالنسبة الى x و y

نفرض الشكل الذي يأخذه السلك منحني معادلته هي $y = f(x)$

قوة السحب T على السلك في نقطتين P و Q قريبتين من بعضهما على السلك هي Δ s

إذن:



نفرض الحركة الإهتزازية للسك فقط علي الصفحة x – y و الحركة فقط في جهة y

القوة الأفقية في النقطة P

$$T \sin\theta\big|_P = T \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = T \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_x$$

القوة الأفقية في النقطة Q

$$T\ \sin\theta\big|_{Q} = T\ \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta s} = T\ (\frac{\Delta y}{\Delta s})_{x+\Delta x}$$

من مفهوم الإشتقاق واضح

$$\tan\theta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(y+\Delta y)-\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-\tan^2\theta}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1-(\frac{\partial y}{\partial x})^2}} \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

نفرض $(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \approx 0$

الكثافة الطولية للسلك هي ρ و التعجيل في الجهة العمودية هو $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$\sum F = ma \Rightarrow T\ (\frac{\Delta y}{\Delta s})_{x+\Delta x} - T\ (\frac{\Delta y}{\Delta s})_{x} = \rho\Delta x\ (\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})$$

نقسم طرفين هذا التساوي على $T\ \Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\frac{\Delta y}{\Delta s})_{x+\Delta x} - (\frac{\Delta y}{\Delta s})_{x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})$$

المعادلة التفاضلية الجزئية النهائية للحركة الإهتزازية للسلك المرّن مع العلم $\alpha^2 = \frac{\rho}{T}$ هي

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

المعادلة التفاضلية الإهتزازية لصفحة مرّنة (غشاء مرّن)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=(\frac{T}{\rho})^2(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$$

T قوة السحب وρ الكثافة السطحية للصفحة أو الغشاء. الصفحة أو الغشاء في صفحة y–x و الإهتزازات ضئيلة جداً في جهة z .

معادلة إنتقال الحرارة

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

كذلك تكتب بهذا الشكل

$$\nabla^2 T+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

T الحراة t الزمن α و k معامل حرارية و $\dot{q}$ الفيض الحراري

معادلة الحفاظ في ميكانيك الموائع

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

كذلك تكتب بهذا الشكل

$$\nabla\cdot\rho\vec{V}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

ρ كثافة المائع الكثافة الحجمية و u و v و w السرعة في جهة (بالترتيب) x و y و z و $\vec{V}=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+w\,\vec{k}$ و t الزمن . في هذه المعادلة الكثافة متغيرة أي غير ثابتة إذا كانت الكثافة ثابتة في هذه الحالة تصبح المعادلة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

المعادلات التفاضليه المتجانسة

الشكل العام لهذه المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

شرط التجانس

$$f(x, y) = f(tx, ty)$$

الفرض

$$y = vx$$

الشكل النهائي للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

إذا كانت المعادلة بهذا الشكل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)}$$

الفرض

$$x = yu$$

الشكل النهائي للمعادلة

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

الحل العام للمعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى

الشكل العام لهذه المعادلات هو :

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

كذلك تكتب بهذه الصورة :

$$y'+p(x)y=g(x)$$

نحصل على هذه الدالة من هذه الرابطة :

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=\exp(\int p(x)dx)$$

الجواب العام هو :

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right]$$

مثال :

المطلوب جواب المعادلة التفاضلية

$$y'+\frac{1}{x}y=3x$$

الحل :

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right]=\frac{1}{x}\left[\int x\times 3x dx+c\right]$$

$$y(x)=\frac{1}{x}(x^3+c)$$

$$y(x)=x^2+cx^{-1}$$

حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية ذات معامل ثابتة

المطلوب حل المعادلة التفاضلية :

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

أو

$$ay''+by'+cy=0$$

a و b و c أعداد ثابتة

نفرض جواب المعادلة هو $y(x)=e^{\beta x}$ إذن الهدف تعين β

$$y(x)=e^{\beta x}\Rightarrow y=\beta e^{\beta x}\Rightarrow y=\beta^2e^{\beta x}$$

نضع كل من a و b و c في المعادلة الأصلية إذن :

$$ay''+by'+cy=0\Rightarrow e^{\beta x}(a\beta^2+b\beta+c)=0$$

جواب المعادلة الجبرية هذه هو :

$$a\beta^2+b\beta+c=0\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\[2mm]\beta_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$

إذا كانت جذور هذه المعادلة الجبرية أعداد حقيقية ، في هذه الحالة جواب المعادلة التفاضلية هو :

$$y=c_1e^{\beta_1x}+c_2e^{\beta_2x}$$

إذا كانت جذور هذه المعادلة الجبرية أعداد حقيقية و مساوية $(\beta_1 = \beta_2)$، في هذه الحالة جواب المعادلة التفاضلية هو :

$$y = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 x e^{\beta_1 x}$$

إذا كانت جذور هذه المعادلة الجبرية أعداد عقدية (مركبة) بصورة $(\lambda \pm i\,\mu)$، في هذه الحالة جواب المعادلة التفاضلية هو :

$$y = c_1 \cos \mu x e^{\lambda x} + c_2 \sin \mu x e^{\lambda x}$$

معادلة شرودنغر الموجية في إمتداد محور x

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i\,(\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t})$$

جواب المعادلة في جهة $x > 0$

$$\psi(x,t) = e^{-i(\omega t - kx)}$$

جواب المعادلة في جهة $x < 0$

$$\psi(x,t) = e^{-i(\omega t + kx)}$$

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

أو

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

عن طريق التخمين و البحث نصل لجواب خاص للمعادلة نفرض الجواب y_1 كذلك cy_1 هو جواب المعادلة ، c عدد ثابت . نفرض $v(x)y_1$ هو جواب المعادلة و $v(x)$ دالة المتغير فيها x . إذن :

$$v(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

و جواب المعادلة :

$$y(x)=cy_1(x)+v(x)y_1$$

في الفصل القادم نشرح هذه الطريقة بالتفصيل .

مثال :

$$x^2y''+xy'-y=0$$

من خلال البحث و تخمين جواب هذه المعادلة حصلنا على $y_1=x$. و لتسهيل المعادلة و تحويلها الى الشكل العام لهذه المعادلة نكتبها بهذا الشكل :

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$$

إذن :

$$v(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx=\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}$$

الجواب النهائي هو :

$$y(x)=cy_1(x)+v(x)y_1=c_1x+c_2x\times\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$y(x)=c_1x+\frac{c_2}{-2}x^{-1}\Rightarrow y(x)=c_1x+c_3x^{-1}$$

الحل العام للمعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية

المعادلة :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad \mathbf{I}$$

كذلك تكتب هذه المعادلة بهذا الشكل :

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$$

في هذه المعادلة $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ دوال المتغير فيها x

لحل هذه المعادلة نفرض جواب المعادلة $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ هو y_1 و y_2 هذه $y=c_1y_1+c_2y_2$ كذلك جواب المعادلة . في هذا الجواب c_1 و c_2 ثواب . إذا إستبدلنا هذه الثوابت بدوال v_1 و v_2 جواب المعادلة الأصلية I هو $y=v_1y_1+v_2y_2$ إذن :

$$y=v_1y_1+v_2y_2 \Rightarrow y'=v_1'y_1+v_2'y_2+v_1y_1'+v_2y_2' \Rightarrow (v_1'y_1+v_2'y_2)+(v_1y_1'+v_2y_2')$$

نفرض $(v_1'y_1+v_2'y_2)=0$ إذن :

$$y'=(v_1y_1'+v_2y_2')$$

$$y'=(v_1y_1'+v_2y_2') \Rightarrow y''=(v_1y_1''+v_2y_2'')+(v_1'y_1'+v_2'y_2')$$

إذا و ضعنا y و y' و y'' في I النتيجة هي :

$$v_1\underbrace{\left(y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1\right)}_{0}+v_2\underbrace{\left(y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2\right)}_{0}+v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x)$$

لأن

y_1 و y_2 جواب المعادلة لذلك أصبح داخل القوسين صفر إذن :

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x)$$

و من الفرض الذي فرضناه

$$(v_1'y_1+v_2'y_2)=0$$

من هذه المعادلتين نحصل على :

$$v_1=\int \frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$v_2=\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

في هذه الروابط :

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$$

إذن جواب المعادلة I هو :

$$y=y_1\int \frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx+y_2\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

مثال : المطلوب جواب المعادلة التفاضليه

$$y''+y=\csc x$$

جواب المعادلة $y''+y=0$ هو $y=c_1\sin x+c_2\cos x$

أي $y=c_1\underbrace{\sin x}_{y_1}+c_2\underbrace{\cos x}_{y_2}$

إذن :

$$w(y_1,y_2)=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1$$

$$v_1=\int\frac{-y_2R(x)}{w(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-\cos x\csc x}{-1}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln\sin x$$

$$v_2=\int\frac{y_1R(x)}{w(y_1,y_2)}dx=\int\frac{\sin x\csc x}{-1}dx=-x$$

إذن الجواب النهائي للمعادلة I هو :

$$y=(\ln\sin x)\sin x+(-x)\cos x$$

توضيح : $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

حل المعادلات التفاضليه من خلال المتسلسلات

متسلسلة تايلور الدالة $f(x)$ حول النقطة x_0 هي :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

نفرض $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ إذن :

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

مثال :

المطلوب جواب المعادلة التفاضليه $y''+y=0$ في الفاصلة (الفترة) $-\infty<x<+\infty$

متسلسلة تايلور حول $x_0=0$ تساوي

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

إذن الإشتقاق الثاني لهذه الرابطة يساوي :

$$y=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y'=a_1+2a_2x^1+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=2a_2+6a_3x^1+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

من هذه الروابط :

$$y''+y=0\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+2)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0$$

بما أن الطرف الأيمن صفر يجب أن تكون جميع المعامل في الطرف الأيسر مساوي لصفر إذن :

$$a_2=-\frac{a_0}{1\times2}=-\frac{1}{2!}a_0$$

$$a_3=-\frac{a_1}{1\times2\times3}=-\frac{1}{3!}a_1$$

$$a_4=-\frac{a_2}{3\times4}=\frac{1}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{a_3}{4\times5}=\frac{1}{5!}a_1$$

$$a_n=a_{2k}=(-1)^k\ \frac{1}{(2k)!}a_0$$

$$a_n=a_{2k+1}=(-1)^k\ \frac{1}{(2k+1)!}a_1$$

لو وضعنا هذه المعامل في المتسلسلة :

$$y=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

فسنحصل على جواب المعادلة أي :

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

و هذه المتسلسلتان هما :

$$y=a_0\cos x+a_1\sin x$$

المعامل a_0 و a_1 هي ثوابت التكاملات

تحويلات لابلاس

تحويلات لابلاس من أسهل و أسرع الطرق لحل الكثير من المعادلات التفاضليه العادية الخطية ذات الشرائط البدائية . تعتمد هذه الطريقة على بعض المحاولات الرياضية البسيطة مع الإستعانة ببعض الروابط التحويلية التي يمكن الحصول عليها من جداول خاصة بتحويلات لابلاس .

تعريف : تحويلات لابلاس دالة $f(t)$ عبارة عن $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ و يكتب بهذه الصورة :

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

مثال : ما هو تحويل لابلاس هذه الدالة $f(t) = t$

$$L\left[t\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

من جداول التكاملات

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{\Gamma(2)}{s^{1+1}}$$

كذلك من دالة غاما $\Gamma(n+1) = n!$ نستنتج $\Gamma(2) = 1$

إذن :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$$

إذن تحويل لابلاس هذه الدالة هو :

$$L\left[t\right] = \frac{1}{s^2}$$

في الصفحة القادمة جدول لأهم تحويلات لابلاس

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ، $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ ، $s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$u_c(t)=\begin{cases}1 & t\le c \\ 0 & t<c\end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
$\delta(t-c)$	e^{-ct}

تحويلات لابلاس إشتقاق رتبة n لداله $f(t)$ نكتبها بهذه الصورة $f^{(n)}(t)$ عبارة عن :

$$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \cdots - s^{n-n} f^{(n-1)}(0)$$

مثال : المطلوب حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = \sin 2t$$

الشرائط البدائية لهذه المعادلة هي $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

الحل :

تحويلات لابلاس لطرفين هذه المعادلة هو :

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = \frac{2}{s^2+4}$$

نضع الشرائط البدائية في هذه الرابطة و نبسطها تصبح النتيجه

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

نكتب هذا التساوي بهذا الشكل

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

توجد طرق خاصة لتحويل و تبسيط الكسور بهذه الصورة .

معكوس لابلاس لهذه الرابطة هو جواب المعادلة و يساوي :

$$y(t) = \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

توضيح :

- من جدول التكاملات

$$\int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

- لتحويل كسر مركب الى كسور بسيطة

$$\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

توجد عدة طرق يتم من خلالها تعين معامل الكسورالتي تساوي لهذا الكسر. نحول الكسر هذا الى كسور فيها روابط شبيهة لتحويلات لابلاس كما هو في هذا الكسر بهذا الشكل:

$$\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4}$$

أي :

$$(as+b)(s^2+4)+(cs+d)(s^2+1) = s^2+6$$

$$(a+c)s^3+(b+d)s^2+(4a+c)s+(4b+d) = s^2+6$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=0 \\ 4a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=0, c=0$$

$$\left.\begin{array}{l} b+d=1 \\ 4b+d=6 \end{array}\right\} \Rightarrow b=\frac{5}{3}, d=-\frac{2}{3}$$

متسلسلة فورييه و حل المعادلات التفاضليه الجزئية

الهدف هو حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}=0$$

الشرائط الحدية :

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow U=0 \\ x=d \Rightarrow U=0 \\ y=0 \Rightarrow U=f(x) \\ y=\infty \Rightarrow U=0 \end{cases}$$

الحل :

نفرض هذه الدالة $U(x,y)=X(x)Y(y)$

إذن:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}=Y\frac{d^2 X}{dx^2}+X\frac{d^2 Y}{dy^2}=0$$

نقسم طرفين هذا التساوي على $X(x)Y(y)$ النتيجة :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}=0$$

يستطلب هذا التساوي

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=-\alpha \qquad \mathbf{I}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}=\alpha \qquad \mathbf{II}$$

إذن جواب المعادلة I :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha\Rightarrow\frac{d^2X}{dx^2}+\alpha X=0\Rightarrow\begin{cases}X(x)=\sin\alpha x\\X(x)=\cos\alpha x\end{cases}$$

من الشرائط الحدية $\alpha=\frac{n\pi}{d}$ بالنتيجة : $X(x)=\sin\frac{n\pi}{d}x$

جواب المعادلة II

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\alpha\Rightarrow\frac{d^2Y}{dy^2}-\alpha Y=0\Rightarrow\begin{cases}Y(y)=e^{\alpha y}\\Y(y)=e^{-\alpha y}\end{cases}$$

من الشرط الحدي $y=\infty\Rightarrow U=0$ نحصل على $Y(y)=e^{-\frac{n\pi}{d}y}$

إذن الجواب النهائي للمعادلة هو :

$$U(x,y)=X(x)Y(y)=e^{-\frac{n\pi}{d}y}\sin\frac{n\pi}{d}x$$

بما أن المعادلة هي معادلة خطية و ضربها بمعمل ثابت و جمعها هو كذلك جواب المعادلة

لذلك من الشرط الحدي $y=0\Rightarrow U=f(x)$ نحصل على :

$$y=0\Rightarrow U=f(x)\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{d}x$$

هذه هي متسلسلة فورية حسب الجيب (sin)، و فيها

$$a_n=\frac{1}{d}\int_{-d}^{d}f(x)\sin\frac{n\pi}{d}x\,dx$$

مبرهنة : نفرض الدوال f و f' مستمرات مقطعياً أي f و f' في بعض النقاط من الفاصلة $\left[-L,+L\right]$ غير مستمران ، و هذه الدوال على الطرف الأيمن و الأيسر من نقاط اللا إستمرار (أو الإنفصال) متناهيات . و في نفس الوقت الدالة f خارج الفترة $\left[-L,+L\right]$ هي دورية و دورتها $2L$ في هذه الحالة ، في نقاط أستمرار هذه الدالة :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

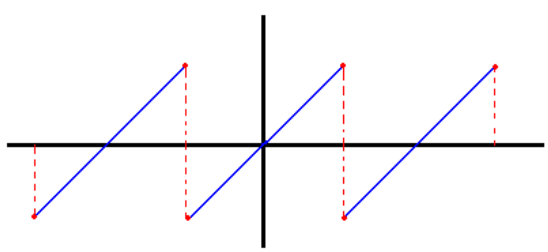
هذا يعني أي دالة مثل $f(x)$ مع تلك الشرائط يمكن كتابتها بشكل متسلسلة ، و تعرف بمتسلسلة فورييه :

مثال :

أوجد متسلسلة فورية للدالة $f(x)=x$ في حالة $-1\le x\le +1$ كل شرائط فورييه صادقة بالنسبة لهذه الدالة :

في هذه الدالة $L=1$

و الدورة هي 2



$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x \cos\frac{n\pi}{L} x dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x \sin\frac{n\pi}{L} x dx = -2\frac{\cos n\pi}{n\pi} = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

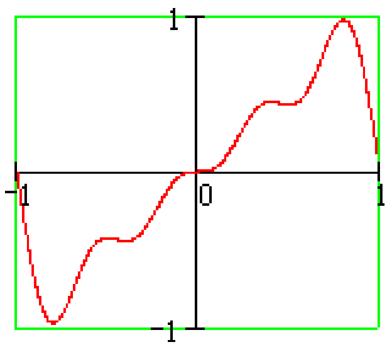
إذن متسلسلة فورييه هذه الدالة هي :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$

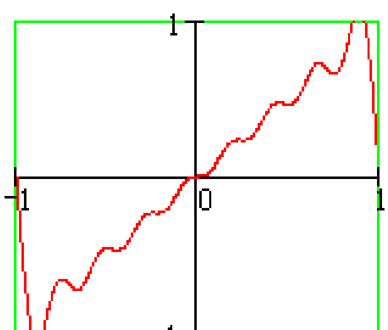
أي :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$

لو رسمنا هذه المتتالية على إحداثي



التقريب الأول هو لأربعة عبارات من المتتالية وهو قريب لشكل الخط و التقريب الثاني و هو لثمانية عبارات من المتتالية و هو أكثر قرباً من الأول لشكل الخط لو رسمنا هذه المتسلسلة لعدد كبير أو لا متناهي من العبارات أي $n \to \infty$ سيكون الشكل خط .



و هذا هو معنى كتابة دالة بمتسلسلة فورييه ، و هي شبيهة بكتابة دالة بمتسلسلة تايلور في التحليل الرياضي الغير متقدم .

المعمل الثابت في هذه المتسلسلة

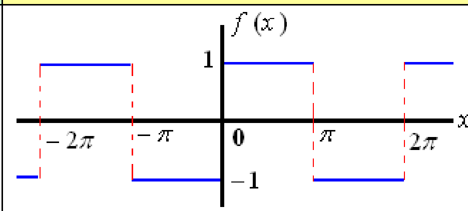
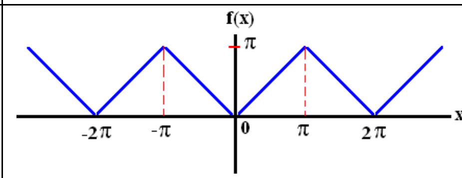
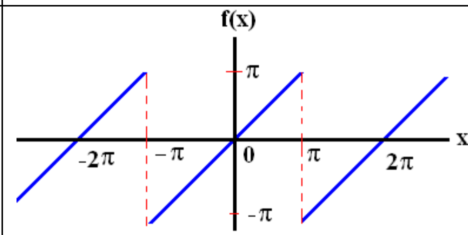
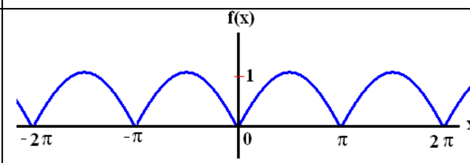
$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

لذلك في هذا المثال :

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx=0$$

فوائد متسلسلات فورييه هي حل المعادلات التفاضلية الجزئية مع الشرائط الحدية ، كذلك كتابة بعض الدوال مع الشرائط التي ذكرناها على شكل متسلسلة كما لاحظنا في المثال . كذلك يستعان بتحويلات فورية لحل المعادلات التكاملية . و الإستفادة منها في تحويلات فورييه لحل المعادلات التفاضليه الجزئية .

بعض متسلسلات فوريه

الدالة	متسلسلة فوريه	البياني
$f(x)=\begin{cases}1,0<x<\pi \\ 0,-\pi<x<0\end{cases}$	$\frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots)$	
$f(x)=\lvert x\rvert=\begin{cases}x,0<x<\pi \\ -x,-\pi<x<0\end{cases}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)$	
$f(x)=x,-\pi<x<\pi$	$2(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots)$	
$f(x)=\lvert\sin x\rvert,-\pi<x<\pi$	$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos 2x}{1\times 3}+\frac{\cos 4x}{3\times 5}+\frac{\cos 6x}{5\times 7}+\cdots)$	

تحويلات فورييه

في متسلسلة فورية إذا $L \to \infty$ في هذه الحالة تتحول متسلسلة فورييه الى تحولات فورييه . إذا كان $f(x)$ و $f'(x)$ في فترة معينة مستمران مقطعياً في هذه الحالة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ مقارب . و مبرهنة تكامل فورييه هي :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{0}^{\infty} \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(x)\sin\alpha x\} dx \\ A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx \end{cases}$$

إذن :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha(x-u)}dudx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du$$

تحويلات فورييه هي :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}dx$$

$$\begin{cases} F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(u)\sin\alpha u du \\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin\alpha x dx \end{cases}$$

تحويل جيب فورييه ، إذا كانت $f(x)$ دالة فردية

$$\begin{cases} F_c(\alpha) = \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x dx \end{cases}$$

تحويل جيب تمام فورييه ، إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية

مبرهنة ملفوف[1] تحويلات فورييه

$$F\{g(x)*f(x)\} = F\{g(x)\}\times F\{f(x)\}$$

مثال : تحويل جيب تمام هذه الدالة هو : $f(x)=e^{-mx}$

$$F_c(\alpha) = \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \Rightarrow F_c(\alpha) = \int_0^\infty e^{-mu}\cos\alpha u du$$

$$F_c(\alpha) = \int_0^\infty e^{-mu}\cos\alpha u du = \left.\frac{e^{-mu}(-m\cos\alpha u + \alpha\sin\alpha u)}{m^2+\alpha^2}\right|_0^\infty = \frac{m}{m^2+\alpha^2}$$

1- convolution

مثال : تحويل فورييه لهذه الدالة

$$f(x)=\begin{cases}1, |x|<b \\ 0, |x|>b\end{cases}$$

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du=\int_{-b}^{b}(1)e^{-i\alpha u}du=\left.\frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha}\right|_{-b}^{b}$$

$$F(\alpha)=\frac{e^{i\alpha b}-e^{-i\alpha b}}{i\alpha}=2\frac{\sin\alpha b}{\alpha} \qquad \alpha\neq 0$$

بعض تحويلات فورييه المهمة:

$$F(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})=i\alpha F(\frac{\partial v}{\partial x})=(i\alpha)^2F(v)=-\alpha^2F(v)$$

$$F(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})=-\alpha^2F(v)$$

$$F(\frac{\partial v}{\partial x})=i\alpha F(v)$$

$$F(\frac{\partial v}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}F(v)$$

$$F(\frac{\partial v}{\partial t})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial v}{\partial t}e^{-i\alpha x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}ve^{-i\alpha x}dx=\frac{\partial}{\partial t}F(v)$$

الحالة العامة :

$$F(\frac{\partial^n v}{\partial x^n})=(i\alpha)^nF(v)$$

يمكن الإستفادة من هذه الروابط لحل المعادلات التفاضلية الجزئية .

مثال : أوجد جواب المعادلة التفاضلية التالية مستعيناً بتحويلات فورييه :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الشرائط الحدية :

$u(x,0)=f(x)$ و $|u(x,t)|<M$ بحيث $t>0$ و $-\infty<x<\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{d}{dt}F(u)\\[2em]\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\kappa\lambda^2F(u)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dt}F(u)=-\kappa\lambda^2F(u)$$

جواب هذه المعادلة التفاضلية العادية هو :

$$F(u)=Ce^{-\kappa\lambda^2t}$$

$$F\{u(x,t)\}=Ce^{-\kappa\lambda^2t}$$

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow F\{f(x)\}=C$$

$$F(u)=F\{f(x)\}e^{-\kappa\lambda^2t}$$

$$e^{-\kappa\lambda^2t}=F\left\{\sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}}e^{-(\frac{x^2}{4\kappa t})}\right\}$$

$$u(x,t)=f(x)*\sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}}e^{-(\frac{x^2}{4\kappa t})}$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(w)\sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}}e^{-\left\{\frac{(x-w)^2}{4\kappa t}\right\}}dw$$

نستعين بتغير المتغير هذا

$$\frac{(x-w)^2}{4\kappa t}=z^2 \Rightarrow \frac{x-w}{2\sqrt{\kappa t}}=z$$

إذن :

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x-2z\sqrt{\kappa t})dz$$

بعض تحويلات فورييه الخاصة

$f(x)$	$F(\alpha)$
$\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < b \\ 0, & \lvert x\rvert > b \end{cases}$	$\dfrac{2\sin b\alpha}{\alpha}$
$\dfrac{1}{x^2+b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{b}$
$\dfrac{x}{x^2+b^2}$	$-\dfrac{\pi i\alpha}{b}e^{-b\alpha}$
$f^{(n)}(x)$	$(i\alpha)^n F(\alpha)$
$x^n f(x)$	$(i)^n \dfrac{d^n F(\alpha)}{d\alpha^n}$

$f(x)$	$F_s(\alpha)$
$\begin{cases} 1, 0 < x < b \\ 0, x > b \end{cases}$	$\dfrac{1-\cos b\alpha}{\alpha}$
x^{-1}	$\dfrac{\pi}{2}$
e^{-bx}	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2+b^2}$
x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1}\csc(\frac{n\pi}{2})}{2\Gamma(n)}$ ، $0 < x < n$

$f(x)$	$F_c(\alpha)$
$\begin{cases} 1, 0 < x < b \\ 0, x > b \end{cases}$	$\dfrac{\sin b\alpha}{\alpha}$
e^{-bx^2}	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}e^{-\frac{\alpha^2}{4b}}$
e^{-bx}	$\dfrac{b}{\alpha^2+b^2}$
x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1}\sec(\frac{n\pi}{2})}{2\Gamma(n)}$ ، $0 < x < n$

دالة غاما[1]

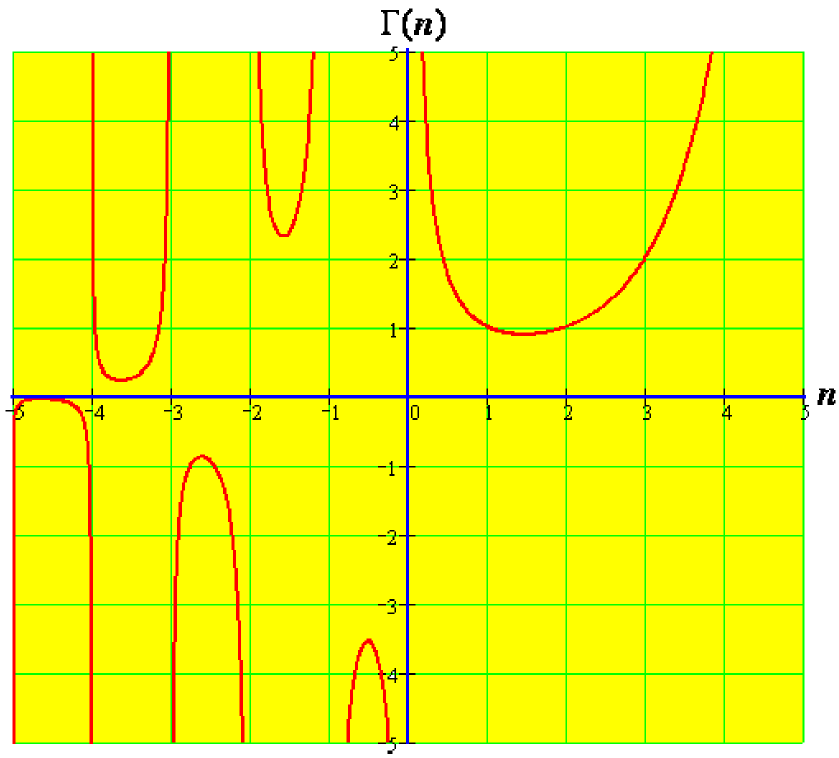
بعض المعادلات التفاضلية تنتهي بدوال خاصة و مهمة كدالة غاما و بتا و غيرها .

تعرف دالة غاما

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{x}dx$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$



دالة بتا[2]

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\beta(m+1,n+1)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

1- Gamma function

2- Beta function

طرق أخرى لحل المعادلات التفاضلية

كثير من المعادلات التفاضلية لا يمكن حلها بالطرق التي تتناولها و تبحثها نظرية المعادلات التفاضلية بشقيّها العادي و الجزئي . توجد طرق أخرى لحل المعادلات التفاضلية كطريقة التكرار أو الطرق العددية و طريقة العناصر المنتهية . تعتمد برامج حل المعادلات التفاضلية بالحاسوب على هذه الطرق .

طريقة التكرار تعرف بطريقة بيكارد (Emile Picard) نفرض هذه المعادلة التفاضلية .

$$y' = f(x, y)$$

القيمة الأولية أو البدائية لهذه المعادلة هي :

$$y(x_0) = y_0$$

أول تقريب

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) dt$$

ثاني تقريب ، و هو حاصل من وضع أول تقريب في الرابطة

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)] dt$$

و هكذا حتى نصل الى آخر تقريب و هو جواب المعادلة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)] dt$$

مثال :

المطلوب حل المعادلة التفاضلية $y' = y$ المقدار البدائي $y(0) = 1$

أي $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$

أول تقريب

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \Rightarrow y_1 = 1 + \int_0^x 1dt \Rightarrow y_1 = 1 + x$$

ثاني تقريب

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(t, y_1)dt \Rightarrow y_2 = 1 + \int_0^x (1+x)dt \Rightarrow y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

و هكذا حتى آخر تقريب و هو جواب المعادلة

$$y_n = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1})dt \Rightarrow y_2 = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots)dt \Rightarrow y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\times 3} + \cdots = e^x$$

الجواب هو :

$$y(x) = e^x$$

طريقة أويلر

المطلوب حل المعادلة التفاضليه

$$y'(x)=f\,[x,y(x)]$$

المقدار البدائي للمعادلة

$$y_0=y(x_0)$$

يصدق x_0 في المعادلة و الجواب هو y_0 إضافة مقدار جداً ضئيل الى x_0 أي $(x_0+\xi)$ يعطي جواب آخر لكن تقريبي للمعادلة هو y_1 و هكذا

n	x_n	y_n
0	x_0	$y_1=y_0$
1	$x_1=x_0+\xi$	$y_2=y_1+\xi f\,(x_1,y_1)$
2	$x_2=x_0+2\xi$	$y_3=y_2+\xi f\,(x_2,y_2)$
3	$x_3=x_0+3\xi$	$y_4=y_3+\xi f\,(x_3,y_3)$
4	$x_4=x_0+4\xi$	$y_5=y_4+\xi f\,(x_4,y_4)$

n	$x_n=x_0+n\xi$	$y_{n+1}=y_n+\xi f\,(x_n,y_n)$

يمكن تشكيل جدول و العثور على جواب المعادلة في نقاط خاصة أو نقاط مطلوب جواب المعادلة فيها ، كذلك يمكن رسم بياني من هذه النقاط المحسوبة . المثال القادم يوضح هذه الطريقة مع الشرح .

مثال : المطلوب حل المعادلة التفاضلية أدناه بطريقة أويلر

$$y' - y = 1 - x$$

المقدار البدائي هو $y(0) = 1$

الحل :

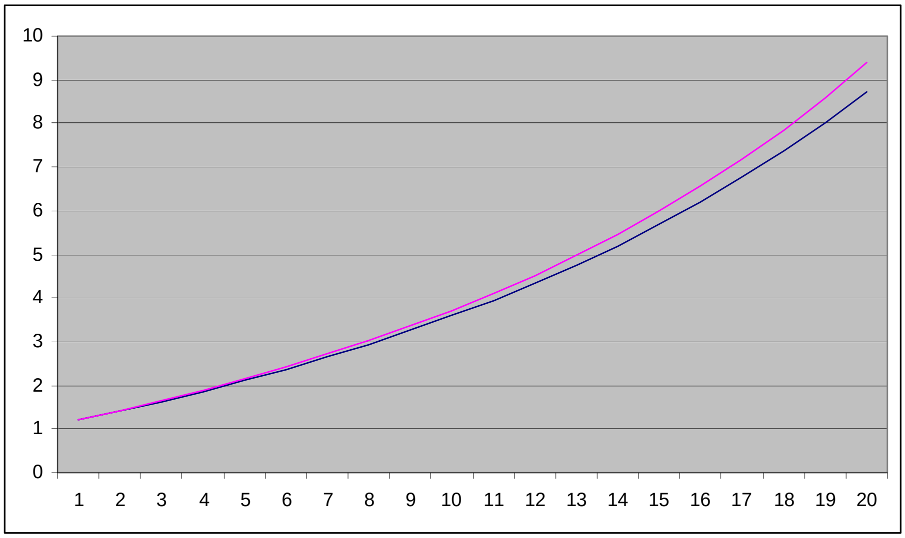
$$y' = y + 1 - x \Rightarrow f(x, y) = y + 1 - x$$

نفرض $\xi = 0.1$ كلما كانت هذه القيمة صغيرة كلما كان الجواب أكثر دقة .

إذن :

n	$x_n = x_0 + n\xi$	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + \xi f(x_n, y_n)$	القيمة الحقيقية
0	0	1	2		1
1	0,1	1,2	2,1	1,2	1,205170918
2	0,2	1,41	2,21	1,41	1,421402758
3	0,3	1,631	2,331	1,631	1,649858808
4	0,4	1,8641	2,4641	1,8641	1,891824698
5	0,5	2,11051	2,61051	2,11051	2,148721271
6	0,6	2,371561	2,771561	2,371561	2,4221188
7	0,7	2,6487171	2,9487171	2,6487171	2,713752707
8	0,8	2,94358881	3,14358881	2,94358881	3,025540928
9	0,9	3,257947691	3,357947691	3,257947691	3,359603111
10	1	3,59374246	3,59374246	3,59374246	3,718281828
11	1,1	3,953116706	3,853116706	3,953116706	4,104166024
12	1,2	4,338428377	4,138428377	4,338428377	4,520116923
13	1,3	4,752271215	4,452271215	4,752271215	4,969296668
14	1,4	5,197498337	4,797498337	5,197498337	5,455199967
15	1,5	5,677248171	5,177248171	5,677248171	5,98168907
16	1,6	6,194972988	5,594972988	6,194972988	6,553032424
17	1,7	6,754470287	6,054470287	6,754470287	7,173947392
18	1,8	7,359917316	6,559917316	7,359917316	7,849647464
19	1,9	8,015909048	7,115909048	8,015909048	8,585894442
20	2			8,727499953	9,389056099

هذه الطريقة مقرونة بخطأ و كلما أبتعدنا عن x_0 يكبر الخطأ ، كذلك للحصول على دقة أعلى للجواب يجب حصر الجواب في فاصلة قريبة من x_0 و كلما أنتخبنا ε صغيرة سيكون الجواب أدق . لو رسمنا الجواب التقريبي y_{n+1} و الحقيقي على إحداثي واحد سنلاحظ الخطأ .



الجواب الحقيقي

الجواب التقريبي

مثال : المطلوب حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2 + \dfrac{1-x}{1+x}$ بحيث $y(0) = 0$ بطريقة أويلر :

جواب هذه المعادلة $y = \dfrac{x}{1+x}$ أنتخبت هذه المعادلة البسيطة لأشرح من خلالها طريقة أويلر في حل هذا النوع من المعادلات ببرنامج بسيط مثل الفيجوال بيسك في الإكسل ، و مقايسة الجواب التقريبي من طريقة أويلر و الجواب الحقيقي للمعادلة .

في هذه المعادلة :

$$f(x,y) = y^2 + \frac{1-x}{1+x}$$

```
Private Sub CommandButton1_Click()
' Euler method to solve ODE
x0 = 0
y0 = 0
a = 0.05
b = x0
For i = 1 To 25
' real function
r = (x0 / (x0 + 1))
' the equation
f = (y0) ^ 2 + ((1 - x0) / (1 + x0))
yn = y0 + a * f
Cells(i + 4, 1) = x0
Cells(i + 5, 2) = yn
Cells(i + 4, 3) = r
x0 = b + i * a
y0 = yn
Next i
End Sub
```

$\xi = a = 0.05$

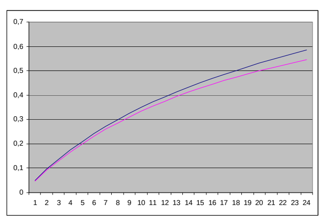
لحل معادلات تفاضلية درجتها أكبر من واحد يجب تقليل درجة المعادلة ثم حلها .

توجد طريقتان عدديتان أخرتان لحل المعادلات التفاضلية .

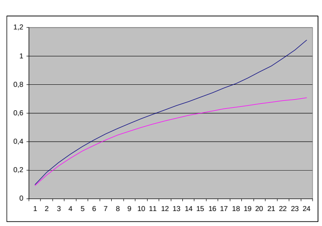
$\xi = a = 0.05$

x	appro. y	real y
0		0
0,05	0,05	0,047619
0,1	0,095363	0,090909
0,15	0,136727	0,130435
0,2	0,174618	0,166667
0,25	0,209476	0,2
0,3	0,24167	0,230769
0,35	0,271513	0,259259
0,4	0,299273	0,285714
0,45	0,32518	0,310345
0,5	0,349433	0,333333
0,55	0,372205	0,354839
0,6	0,393648	0,375
0,65	0,413896	0,393939
0,7	0,433067	0,411765
0,75	0,451268	0,428571
0,8	0,468593	0,444444
0,85	0,485127	0,459459
0,9	0,500949	0,473684
0,95	0,516128	0,487179
1	0,530729	0,5
1,05	0,544813	0,512195
1,1	0,558435	0,52381
1,15	0,571646	0,534884
1,2	0,584497	0,545455
	0,597033	

$\xi = a = 0.05$



$\xi = a = 0.1$



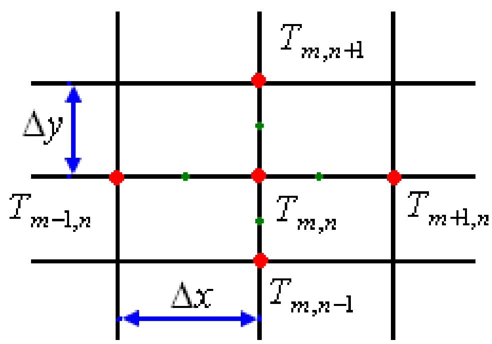
$\xi = a = 0.1$

x	appro. y	real y
0		0
0,1	0,1	0,090909
0,2	0,182818	0,166667
0,3	0,252827	0,230769
0,4	0,313065	0,285714
0,5	0,365724	0,333333
0,6	0,412432	0,375
0,7	0,454442	0,411765
0,8	0,492741	0,444444
0,9	0,528132	0,473684
1	0,561287	0,5
1,1	0,592791	0,52381
1,2	0,62317	0,545455
1,3	0,652913	0,565217
1,4	0,682499	0,583333
1,5	0,712413	0,6
1,6	0,743166	0,615385
1,7	0,775318	0,62963
1,8	0,809504	0,642857
1,9	0,846463	0,655172
2	0,887078	0,666667
2,1	0,932435	0,677419
2,2	0,983895	0,6875
2,3	1,0432	0,69697
2,4	1,112633	0,705882
	1,195252	

طرق عددية أخرى

لأكثر المعادلات التفاضلية الجزئية طريقة عددية تعرف بطريقة العناصر المنتهية أو الأجزاء المحددة ، هذه الطريقة هي طريقة تخصصية في مجال الهندسة المدنية و الميكانيكية و الكهربائية نشرحها في الفصل القادم . سأشرح طريقة عددية لحل بعض المسائل في إنتقال الحرارة تعتمد هذه الطريقة و طريقة العناصر المنتهية على رسم شبكة من مربعات أو مثلثات أو أشكال أخرى هذه الشبكة متكونة من عدة نقاط ، تعتمد هذه الطريقه العددية على تعين قيمة الدالة في نقاط الشبكة . في مسئلة إنتقال الحرارة ، المعادلة التفاضلية لأنتقال الحرارة في أبسط صيّغها هي :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$



المطلوب درجة حرارة النقطة $T_{m,n}$ في الوقت الذي درجة حرارة النقاط التي تحيطها معلومة .

درجة حرارة النقطة بين $T_{m,n}$ و $T_{m+1,n}$ هي $T_{m+\frac{1}{2},n}$ و هكذا :

من تعريف الإشتقاق :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

إذن :

بالنسبة لسريان الحرارة في الجهة الأفقية :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} - \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

كذلك بالنسبة الى سريان الحرارة في الجهة القائمة

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

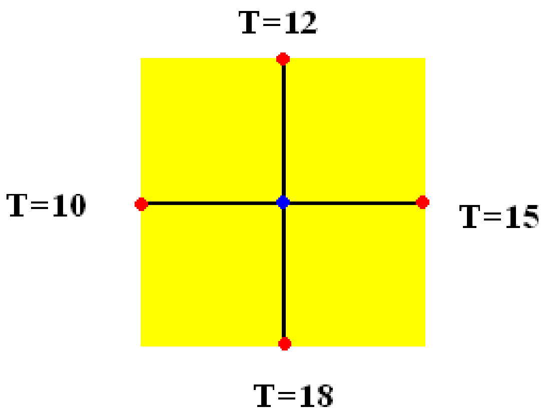
إذا فرضنا $\Delta x = \Delta y$ في هذه الحالة

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

لا أستطرق للنقاط الموجودة في الأطراف و الزوايا و أكتفي بالنقاط الوسطى .

مثال :

صفحة فلزية مربعة الشكل درجة الحرارة أطرافها كما في الشكل ما هي درجة حرارة وسطها ؟



درجة حرارة وسط الصفحة $T_{0,0}$

$$T_{1,0} = 15^{\circ}C$$

$$T_{-1,0} = 10^{\circ}C$$

$$T_{0,1} = 12^{\circ}C$$

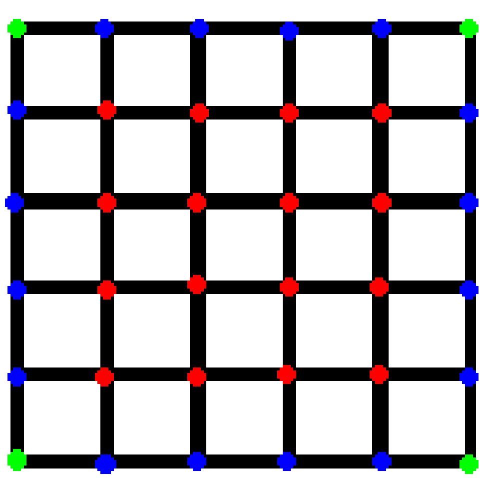
$$T_{0,-1} = 18^{\circ}C$$

إذن :

$$T_{1,0} + T_{-1,0} + T_{0,1} + T_{0,-1} - 4T_{0,0} = 0 \Rightarrow T_{0,0} = 11.25^{\circ}C$$

هذه الحرارة تقريبية و كلما كانت نقاط الشبكة أكثر تكون الدقة كذلك أكثرو هذا يستطلب حل عدد كثير من المعادلات . توجد برامج تقوم بحل هذا النوع من المسائل .

أنواع النقاط أو العقد في هذا النوع من الشبكات



طريقة العناصر المنتهية

تستعمل هذه الطريقة لحل المسائل الهندسية (الكهربائية ، و الميكانيكية و الإنشائية و غيرها من المسائل الهندسية التي تنتهي بمعادلات تفاضلية) في هذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الى عدة معادلات جبرية في نقاط الشبكة التي ترسم من خلال هندسة المسئلة . تكتب هذه المعادلات الجبرية بصورة مصفوفات ، بهذا الشكل :

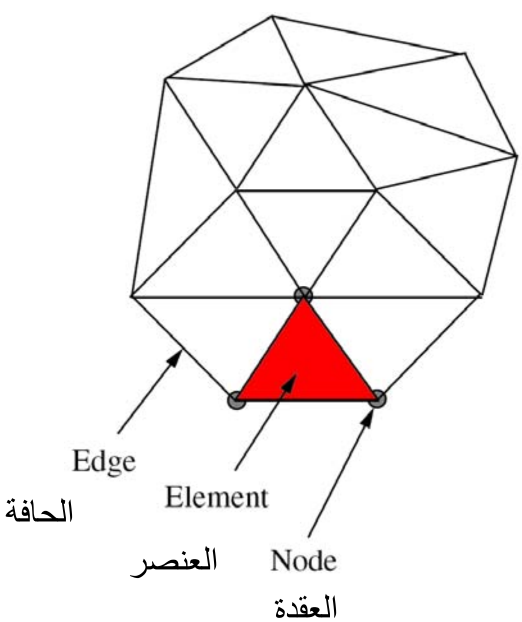
$$\left[k^{(e)}\right]\{\phi\}=\{f\}$$

$\{f\}$ مصفوفة القوى الخارجية

$\{\phi\}$مصفوفة المجاهيل (كالحرارة ، و السرعة و تغير المكان و غيرها)

$\left[k^{(e)}\right]$ مصفوفة الصلابة (stiffness matrix)

أهم أجزاء الشبكة (mesh أو grid) في طريقة العناصر المنتهية



العناصر الخطية : 1 ——— 2

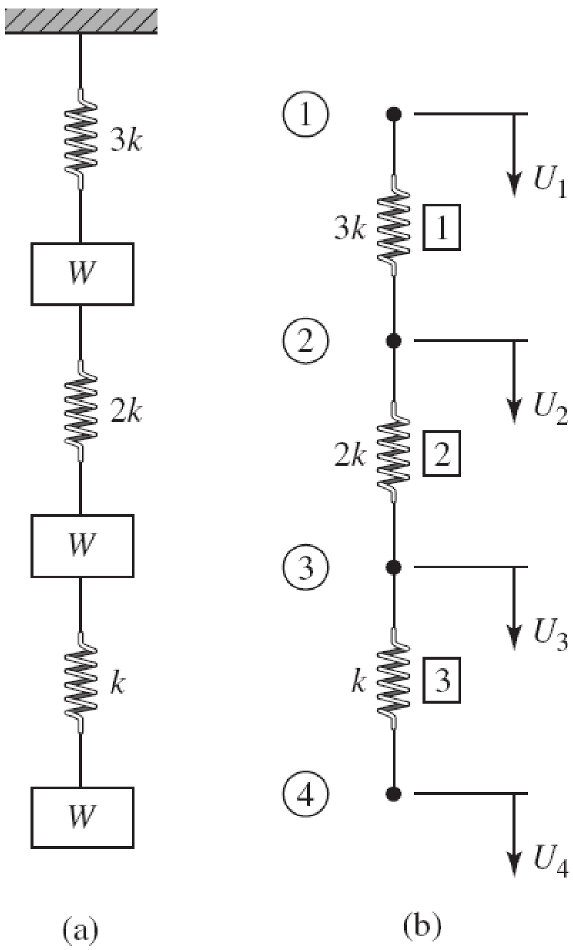
المعادلة التفاضليه $D\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+Q=0$

$$\frac{D}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\end{Bmatrix}=\frac{QL}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

L طول العنصر

مثال :

ثلاثة كتل متساوية مرتبطة بثلاثة زنبركات كما هو في الشكل . المطلوب تغير المكان القائم لكل من هذه الكتل نتيجة الحركة الإهتزازية في الصفحة القائمة .



$$\left[k^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix}$$

$$\left[k^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\left[k^{(3)}\right]=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$u_2^{(3)}=U_4$ ، $u_2^{(2)}=u_1^{(3)}=U_3$ ، $u_2^{(2)}=u_1^{(2)}=U_2$ ، $u_1^{(1)}=U_1$

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

نتيجة هذه المصفوفات :

$$k \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ W \\ W \\ W \end{Bmatrix}$$

بما أن $u_1^{(1)} = U_1 = 0$ لذلك :

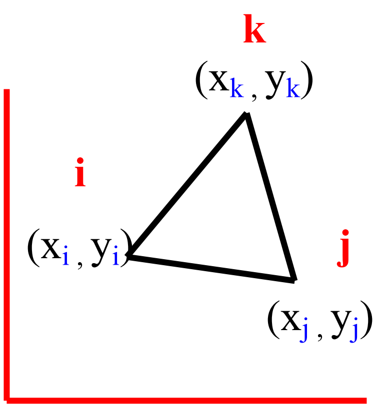
$$-3kU_2 = F_1$$

$$k\begin{bmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ U_3\\ U_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}W\\ W\\ W\end{Bmatrix}$$

$$U_4=\frac{3W}{k} \quad \text{و} \quad U_3=\frac{2W}{k} \quad \text{و} \quad U_2=\frac{W}{k}$$

جواب المعادلة التفاضليه :

$$D_x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-G\phi+Q=0$$



العناصر الخطيه المثلثيه :

$$b_i=y_j-y_k \qquad c_i=x_k-x_j$$
$$b_j=y_k-y_i \qquad c_j=x_i-x_k$$
$$b_k=y_i-y_j \qquad c_k=x_j-x_i$$

$$a_i=x_iy_k-x_ky_j$$
$$a_j=x_ky_i-x_iy_k$$
$$a_k=x_iy_j-x_jy_i$$

مصفوفة الصلابة

$$\left[k_D^{(e)}\right]=\frac{D_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & b_j^2 & b_jb_k \\ b_ib_k & b_jb_k & b_k^2 \end{bmatrix}+\frac{D_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c_j^2 & c_jc_k \\ c_ic_k & c_jc_k & c_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right]=\frac{GA}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

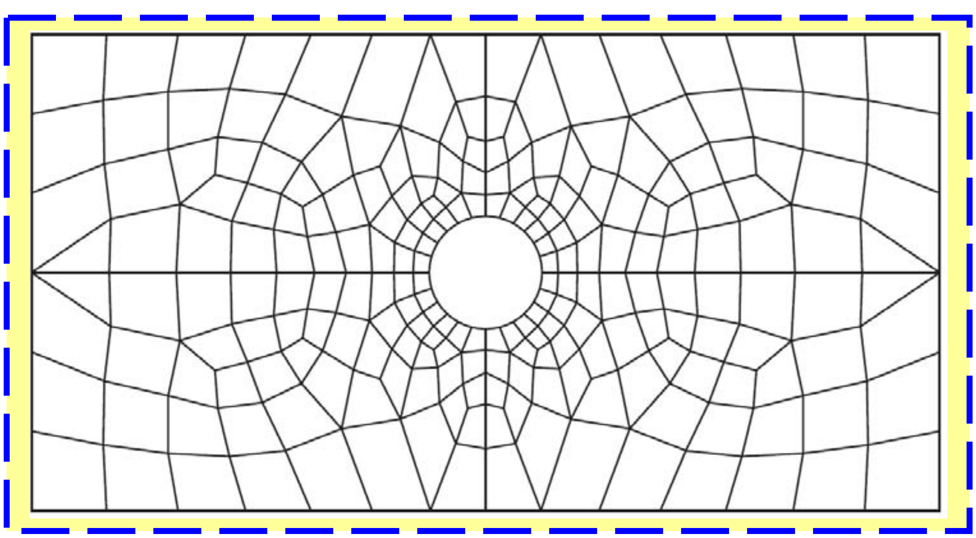
$$\left[k^{(e)}\right]=\left[k_D^{(e)}\right]+\left[k_G^{(e)}\right]$$

$$\{f\}=\frac{QA}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A مساحة العنصر المثلثي تساوي :

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

$$\left[k^{(e)}\right]\{\phi\}=\{f\}$$



شبكه لعناصر فوق مربعية

العناصر الخطيه المربعيه

نفرض العنصر المنتهي مربع مستطيل طوله a و عرضه b في هذه الحالة المصفوفات هي :

$$\left[k_D^{(e)}\right]=\frac{D_x a}{6b}\begin{bmatrix}2 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -2 & 2\end{bmatrix}+\frac{D_y b}{6a}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -2 & -1\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right]=\frac{GA}{36}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\left[k^{(e)}\right]=\left[k_D^{(e)}\right]+\left[k_G^{(e)}\right]$$

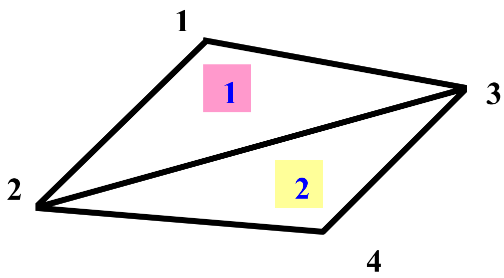
$$\{f\}=\frac{QA}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix}$$

A مساحة العنصر المربعي

$$\left[k^{(e)}\right]\{\phi\}=\{f\}$$

مثال : عنصران مثلثيان



$$\left[k_1^{(e)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left[k_2^{(e)}\right]=\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\{f_1\}=\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_2\}=\begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}=\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$\left[k^{(e)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2+d_2 \\ c_3+d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

المعادلة

$$\left[k^{(e)}\right]\{\phi\}=\{f\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2+d_2 \\ c_3+d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

كان هذا ملّخص لأهم مفاهيم طريقة العناصر المنتهية الخطية .

معجم بعض أهم إصطلاحات المعادلات التفاضليه

إنجليزي – عربي

Analytic	تحليلي
Approximation	تقريب
Boundary condation	الشرط الحدّي
Boundary value	القيمة الحدّية
Calculus of variation	حساب التغيّرات
Coefficient	معامل
Conservative	محافظ
Constant	ثابت
Damper oscillation	مُخمد اهتزاز
Degree	درجة
derivation	إشتقاق
Derivative	مشتق - تفاضلي
Derive	أشتقّ
Differentiable	قابل للإشتقاق – إشتقاقي
Differential	تفاضلي – تفاضل
Differential calculus	حساب التفاضل
Differential coefficient	معامل تفاضلي
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Differential equation	معادلة تفاضلية
Eigenfunction	دالة ذاتية

Eigenvalue	قيمة ذاتية
Endpoint	نقطة طرفية
Euler method	طريقة أويلر
Exact differential	تفاضل تامّ
Finite Element Method **FEM**	طريقة العناصر المنتهية
Fourier transform	تحويل فورييه
Function	دالة
Hypergeometric	فوق هندسية
Improper	مُعتل
Infinite	لانهائي
Initial condition	شرط ابتدائي
Integral	تكامل
Integrate	كاملَ
Integrating factor	عامل مُكاملة
Integration	مُكاملة
Integro-differential equation	معادلة تكاملية تفاضلية
Interval	فترة – فاصلة
Inverse Laplace transform	معكوس تحويل لابلاس
Laplace transform	تحويل لابلاس
Laplacian operator	مؤثر لابلاس
Linearization	
Membrane	غشاء

Method	طريقة
Numerical method	الطريقة العددية
Ordenary Differential Equation **ODE**	معادلة تفاضلية عادية
Order	مرتبة
Partial	جزئي
Partial derivative	مشتق جزئي
Partial Differential Equation **PDE**	معادلة تفاضلية جزئية
Particular solution	الحلّ الخاصّ
Piecewise continuous	مقطعياً مستمر
Polynomial	حدودي – حدودياتي – حدودية
Reduction of order	إختزال المرتبة
Regular	منظم
Separation	الفصل
Sequence	متتالية
Sequence	متتاليه
Series	متسلسلة
Series	متسلسله
Solution	حلّ
System	منظومة
Theorem	مبرهنة – قضية
Transformation	تحويل
Variable	متغير

المصـــــــــــادر

- Differential Equations with Applications and Historical Notes, Gorge F. Simmons, McGraw-Hill Inc., 1972

- Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow, Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhally N. Seetharamu, WILEY

- FUNDAMENTALS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS, DAVID V. HUTTON

- Schaum’s Outlines, Mathematical Handbook of Formulas and Tables

- Fourier Analysis, M. R. Spiegle

- معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.

جلال الحاج عبد

شتاء 2008