**Comparison different methods to estimate two parameters**

**for one of probability failure distributions**

**مقارنة طرائق مختلفة لتقدير معلمتي أحد توزيعات الفشل الاحتمالية**

أ. م. د. سعاد خلف سلمان

قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة / جامعة كربلاء

|  |
| --- |
| **المستخلص:**  يتناول هذا البحث تقدير معلمتي الشكل () والقياس () لتوزيع بأعتماد مقدرات الأمكان الأعظم ومقدر بيز () وبيز (), و مقدرات مقترحة للمعلمة () بأعتبار أنها متغير عشوائي له توزيع سابق , وبعد تقدير المعلمات يمكن تقدير متوسط وقت الأشتغال لحين الفشل, وكذلك تقدير معولية الأجهزة.  **Abstract:**  The paper deals with estimating two parameters, shape parameter (p), and scale parameter (b), for the distribution by using Maximum likelihood estimator, Bayes I & Bayes II estimators, which is proposed estimators for the parameter (p), as a random variable with prior distribution , after estimating the parameters we can estimate mean time until failure, in addition to estimating the reliability of equipment.  ,Mean Square Error (MSE), Maximum likelihood (MLE), Bayes estimator (), (). |

**1–المقدمة**

يعتبر توزيع () الذي أدخله العالم الأحصائي الكبير () عام 1942 توزيع أحتمالي له أهمية كبيرة في تحليل بيانات فشل المعدات والمركبات ودراسات المعولية وكذلك في تطبيقات نماذج الأجهاد والمتانة, وهنالك أنواع عديدة من صيغ الدالة الأحتمالية لتوزيع () ولكننا سنتناول توزيع . وسوف نوضح أولاً في الجانب النظري كيفية تقدير معلمة الشكل () ومعلمة القياس () للدالة الأحتمالية (2), بطريقة الأمكان الأعظم ومقدر بيز ()ومقدر بيز (), وبعد أجراء تجارب المحاكاة يتم الحصول على أفضل المقدرات التي تمتلك أصغر متوسط مربعات خطأ ممكن, وعرضت نتائج المحاكاة في جداول خاصة لحجوم عينات مختلفة () حيث وضعت قيم المقدرات وتحتها وضع متوسط مربعات الخطأ داخل قوسين صغيرين.

**2 - الجانب النظري**

تأخذ الدالة الأحتماليةالتراكمية لتوزيع الصيغة التالية:

(1)

ومنها تكون صيغة دالة كثافة الأحتمال () هي:

1. (2)

وتشير الى معلمة الشكل () والى معلمة القياس () وكذلك تعٌرف دالة المعوليةوهي أحتمال بقاء النظام أو الجهاز صالح للعمل بعد الزمن أي

(3)

وفيما يلي شرح لطرائق تقدير المعلمات وهي على الترتيب, الأمكان الأعظم و و .

**2–1 طريقة الأمكان الأعظم**

تعتبر من الطرق المهمة في التقدير وأن مقدراتها تتمتع بخصائص ممتازة, وهذه المقدرات تجعل لوغاريتم دالة الأمكان في نهايتها العظمى, فاذا كانت لدينا عينة عشوائية () من التوزيع الأحتمالي المعرف (2) فأن دالة الأمكان ستكون:

(4)

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة (4) نحصل على:

وباشتقاق طرفي المعادلة اعلاه نحصل على:

(5)

(6)

وعند مساواة المعادلة (5) للصفر نحصل على:

(7)

فإذا افترضنا أن ستكون صيغة:

وبالإمكان اعطاء قيمة أولية أخرى للمعلمة وتطبيق طريقة النقطة الصامدة لتطوير مقدر الأمكان الأعظم للمعلمة , ومن المعالدلة (6) نجد أيضاً أن:

(9)

وهي أيضاً معادلة ضمنية تتضمن بالأمكان تعويض مقدر الأمكان الأعظم للمعلمة () من المعادلة (8), في المعادلة (9) واستخدام طرائق عددية لإيجاد مقدر الأمكان الأعظم للمعلمة .

وبعد ايجاد مقدري الأمكان الأعظم للمعلمتين يكون مقدر الأمكان الأعظم لدالة المعولية لتوزيع هو:

(10)

**2–2 مقدر بيز للمعلمة ولدالة المعولية[7,8]**

في هذا الجزء من البحث سيتم التركيز على أيجاد مقدر بيز لمعلمة الشكل باعتبار أنها متغير عشوائي يتبع توزيع كاما بالمعلمات (), حيث أن توزيع المشاهدات هو وكما معرف في المعادلة (2):

وأن المعلمة هي متغير عشوائي يتبع توزيع كاما,

(11)

ولإيجاد المقدر البيزي وفق دالة خسارة معرفة, لابد أولاً من أيجاد التوزيع اللاحق :

وحيث أن:

(13)

ويمكن كتابة المقدار بالصيغة

ثم يتم جمع هذا المقدار مع

علماً بأن:

وحسب قاعدة كاما في التكامل:

فأن:

وطبقاً لهذه التكاملات تكون:

(14)

وتحت دالة خسارة تربيعية

(15)

فأن دالة المخاطرة Risk function هي:

مقدر بيز للمعلمة هو متوسط التوزيع اللاحق

(17)

حيث أن () ثوابت معلومة.

أما **المقدر البيزي الثاني** فيعتمد على:

(18)

وهو التوزيع الثاني المقترح للمعلمة وطبقاً لذلك لابد من أيجاد التوزيع اللاحق:

وهو أيضاً توزيع كاما

وفي حالة دالة خسارة تربيعية يكون مقدر بيز للمعلمة هو:

(20)

ولقيم c المعلومة وقيم المقدرة بطريقة الأمكان الأعظم يمكن الحصول على مقدرات بيزية جديدة مقترحة للمعلمة والتي تم تسميتها .

**3- المحاكاة Simulation**

الجدول (1) التالي يلخص نتائج المحاكاة لتقدير المعلمتين () بطريقة الأمكان الأعظم لقيم أولية مختارة وقد وضعت قيم متوسط مربعات خطأ التقدير داخل قوسين صغيرين

جدول (1): قيم مقدرات و للمعلمتين و بطريقة الأمكان الأعظم

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |  | |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 | 1.0686  (0.0958) | 0.5759  (0.0362) | 1.6030  (0.2157) | 2.4077  (0.9554) | 0.5343  (0.0239) | 1.0810  (0.0574) | 2.1373 (0.3835) | 1.8588  (0.7203) |
| 25 | 1.0419  (0.0471) | 0.5430  (0.0196) | 1.5629  (0.1061) | 2.2277  (0.4898) | 0.5209  (0.0117) | 1.0463  (0.0319) | 2.0838 (0.1886) | 1.6977  (0.3475) |
| 50 | 1.0267  (0.0216) | 0.5237  (0.0081) | 1.5401  (0.0486) | 2.1193  (0.1758) | 0.5133  (0.0054) | 1.0268  (0.0166) | 2.0535 (0.0865) | 1.6006  (0.1154) |
| 75 | 1.0223  (0.0152) | 0.5147  (0.0050) | 1.5334  (0.0343) | 2.0729  (0.1058) | 0.5111  (0.0038) | 1.0174  (0.0107) | 2.0446  (0.0611) | 1.5611  (0.0687) |
| 100 | 1.0172  (0.0099) | 0.5088  (0.0035) | 1.5258  (0.0224) | 2.0436  (0.0744) | 0.5086  (0.0024) | 1.0106  (0.0078) | 2.0345  (0.0399) | 1.5363  (0.0477) |

الجدول رقم (2) يحتوي على قيم مقدرات و للمعلمة بطريقة بيز المقترحة الأولى ولتراكيب مختلفة.

جدول (2): قيم المقدرات و للمعلمة بطريقة بيز الأولى

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |  | |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 | 0.9893  (0.0573) | 1.1913  (0.1327) | 1.3931  (0.1107) | 1.7261  (0.2384) | 0.5294  (0.0198) | 0.6175  (0.0417) | 1.7510 (0.2008) | 2.2260  (0.3410) |
| 25 | 0.9973  (0.0349) | 1.1184  (0.0618) | 1.4389  (0.0708) | 1.6436  (0.1196) | 0.5193  (0.0106) | 0.5711  (0.0180) | 1.8482 (0.1254) | 2.1480  (0.1840) |
| 50 | 1.0052  (0.0184) | 1.0660  (0.0259) | 1.4781  (0.0386) | 1.5828  (0.0534) | 0.5129  (0.0051) | 0.5385  (0.0071) | 1.9329 (0.0672) | 2.0892  (0.0875) |
| 75 | 1.0089  (0.0136) | 1.0486  (0.0174) | 1.4920  (0.0290) | 1.5624  (0.0369) | 0.5109  (0.0037) | 0.5279  (0.0046) | 1.9633  (0.0501) | 2.0691  (0.0624) |
| 100 | 1.0067  (0.0091) | 1.0371  (0.0112) | 1.4951  (0.0196) | 1.5478  (0.0240) | 0.5084  (0.0024) | 0.5212  (0.0029) | 1.9738  (0.0342) | 2.0534  (0.0406) |

جدول رقم (3) يضم مقدرات بيز المقترحة للمعلمة بطريقة بيز الثانية ولتراكيب مختلفة من القيم الأولية لكل من

جدول (3): قيم المقدرات و للمعلمة بطريقة بيز الثانية

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |  | |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 | 0.9974  (0.0794) | 0.8549  (0.0793) | 1.4961  (0.1787) | 1.2824  (0.1786) | 0.4987  (0.0198) | 0.4274  (0.0198) | 1.9948 (0.3177) | 1.7099  (0.3175) |
| 25 | 1.0002  (0.0418) | 0.9169  (0.0420) | 1.5004  (0.0941) | 1.3753  (0.0946) | 0.5001  (0.0104) | 0.4584  (0.0105) | 2.0005 (0.1674) | 1.8338  (0.1682) |
| 50 | 1.0062  (0.0201) | 0.9651  (0.0197) | 1.5093  (0.0452) | 1.4477  (0.0443) | 0.5031  (0.0050) | 0.4825  (0.0049) | 2.0124 (0.0805) | 1.9302  (0.0788) |
| 75 | 1.0086  (0.0144) | 0.9814  (0.0139) | 1.5130  (0.0325) | 1.4721  (0.0314) | 0.5043  (0.0036) | 0.4907  (0.0034) | 2.0173  (0.0578) | 1.9628  (0.0558) |
| 100 | 1.0070  (0.0095) | 0.9867  (0.0092) | 1.5106  (0.0214) | 1.4801  (0.0208) | 0.5035  (0.0023) | 0.4933  (0.0023) | 2.0141  (0.0381) | 1.9734  (0.0371) |

**4-الاستنتاجاتconclusions**

1- وجد أن متوسط مربعات الخطأ لمقدر معلمة الشكل () ومقدر معلمة القياس () يتناقص كلما أزداد حجم العينة في جدول رقم(1) وهذا طبيعي بالنسبة لمقدرات الأمكان الأعظم التي تتمتع بخاصية الثبات والاتساق وغيرها.

2– وجد أن مقدر بيز () للمعلمة () مقارنة بمقدرات () كان الأفضل كما هو واضح من النتائج في جداول المقدرات (2) و (3).

3– مقدرات(MLE) كانت جيدة الا انها ليست كما هو الحال في المقدرات البيزية, وعليه نوصي باعتماد المقدر البيزي لأنه يوظف كل المعلومات السابقة حول المعلمة في التقدير اللاحق لها.

[1]A. M. Hossain and S. K. Nath, (1997), “Estimation of parameters in the presence of outliers for a Burr XII distribution,” Communications in Statistics, vol. 26, no. 3, pp. 637–652.

[2]A. S. Wahed,( 2006) “Bayesian inference using Burr model under asymmetric loss function: an application to Carcinoma survival data,” Journal of Statistical Research, vol. 40, no. 1, pp. 45–57.

[3] D. Moore and A. S. Papadopoulos, (2000),“The Burr Type XII Distribution as a Failure Model under Various Loss Functions,” Microelectronics Reliability, Vol. 40, No. 12, pp. 2117-2122.

[4]E. K. AL-Hussaini, (2010)“On Exponential Class of Distributions,” Journal of Statistics Theory and Applications, Vol. 9, pp. 41-63.

[5]E. K. AL-Hussaini and Z. F. Jaheen, (1995)“Bayes Prediction Bounds for the Burr Type XII Failure Model,” Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 24, No. 7, 1829-1842.

[6]F. K. Wang, J. B. Keats, and W. J. Zimmer, (1996) “Maximum likelihood estimation of the burr XII parameters with censored and uncensored data,” Microelectronics Reliability, vol. 36, no. 3, pp. 359–362.

[7]I. Makhdoom and A. Jafari,( 2011) “Bayesian estimations on the Burr type XII distribution using grouped and un-grouped data,” Australian Journal of Basic and Applied Sciences, vol. 5, no. 6, pp. 1525–1531,

[8]H. Panahi and S. Asadi,( 2011) “Analysis of the type-II hybrid censored Burr type XII distribution under LINEX loss function,” Applied Mathematical Sciences, vol. 5, no. 79, pp. 3929–3942.